

基于金属刚塑性/刚粘塑性不可压缩材料的无网格 RKPM 法*

(上海交通大学 国家模具 CAD 工程中心, 上海 200030) 刘永辉 虞松 陈军 李从心

摘要: 文章将刚塑性/刚粘塑性流动理论与再生核质点方法 (RKPM) 相结合, 提出了基于刚塑性/刚粘塑性不可压缩材料的无网格 RKPM 法, 进一步拓展了无网格 RKPM 法的应用范围。分别采用边界奇异权法和修正的罚函数法处理本质边界条件和体积不可压缩条件, 推导了金属塑性成形过程无网格 RKPM 法数值模拟的刚度方程, 给出了关键算法。对平面应变镦粗过程进行了数值模拟, 并将模拟结果与刚塑性有限元体积成形商品化软件 Deform 2D 计算结果作了比较, 二者吻合良好, 表明了该文方法的正确性和有效性。

关键词: 再生核质点法; 金属塑性成形; 刚塑性/刚粘塑性; 不可压缩性; 修正的罚函数法

中图分类号: TB24; TG302 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-2012 (2006) 05-0001-05

引言

金属塑性成形技术在金属零件的制造过程中起着十分重要的作用。应用传统有限元法模拟金属塑性成形过程时, 会在变形剧烈区域产生网格畸变, 导致计算停止。无网格法是近年来发展起来的一种新的数值模拟方法, 它将连续体离散为有限数目的节点, 在构造场函数时只需节点信息而不需要节点的连接信息, 避免了有限元中繁琐的单元网格生成, 消除了网格畸变。有代表性的无网格法有光滑质点流体动力学方法 SPH、扩散单元法 DEM、无网格伽辽金法 EFGM、单元分解法 PUFEM、再生核质点方法 RKPM 及局部边界积分法 LBIEM 等。其中以 SPH、EFGM 和 RKPM 在金属塑性成形中的研究与应用最为广泛。

1998 年, 美国爱荷华大学的 Chen 等人^[1]首先将无网格 RKPM 法用于解决金属塑性成形问题, 对弹塑性材料的圆环压缩、轴对称镦粗、二维板料成形等工艺过程进行了拉格朗日 RKPM 法数值模拟。Xiong 等采用 RKPM 法对刚塑性微压缩材料的平面应变轧制问题^[2]和三维轧制问题^[3]进行了数值分析; 后来又扩大应用, 对二维镦粗和反向挤压^[4]以及顶镦^[5]等工艺进行了模拟。在国内, 湖南大学的李光耀等^[6]对三维弹塑性金属材料成形问题进行了 RKPM 法数值模拟; 东北大学的崔青玲等^[7]对矩形坯

料平面无摩擦镦粗过程进行了 RKPM 法分析, 工件假定为刚塑性可压缩材料。

在传统的金属体积成形工艺(如镦粗、拉拔、挤压等)的数值模拟分析时, 由于塑性变形远大于弹性变形, 可忽略弹性变形, 将材料模型简化为刚塑性/刚粘塑性材料模型; 而刚(粘)塑性材料模型是以材料不可压缩性(即体积不变)为假设前提的^[8]。在已有的文献中, 无网格 RKPM 法用于分析金属刚塑性/刚粘塑性不可压缩材料的塑性变形过程还少有报道。本文对无网格 RKPM 法在金属刚塑性/刚粘塑性不可压缩材料中的关键应用技术进行了研究, 进一步拓展了其应用范围; 并以平面应变镦粗为例进行了分析, 模拟结果说明了本文方法的正确性和有效性。

1 基本理论

1.1 无网格 RKPM 法及速度场的构造

由再生核近似原理, 二维金属塑性成形问题速度场的近似为

$$u(x) \approx u^h(x) = \Psi(x)\hat{u}(x) \quad (1)$$

且有

$$u^h(x) = \begin{bmatrix} u_x^h(x) \\ u_y^h(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\Psi(x) = [\Psi_1(x) \cdots \Psi_{NP}(x)] \quad (3)$$

$$\Psi_I(x) = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{u}(x) = [\hat{u}_1(x) \cdots \hat{u}_{NP}(x)]^T \quad (5)$$

$$\hat{u}_I(x) = [\hat{u}_{Ix}(x) \quad \hat{u}_{Iy}(x)] \quad (6)$$

式中 $\phi_I(x)$ ——形函数, $\phi_I(x) = C(x, x-x_I)\omega(x-x_I)\Delta V_I$

* 国家自然科学基金资助项目 (50275094)。

刘永辉 E-mail: liuyonghui@sjtu.edu.cn

作者简介: 刘永辉, 男, 1978 年生, 山东莱阳人, 博士生

收稿日期: 2005-09-01; 修订日期: 2005-12-30

$C(x, x-\bar{x})$ ——修正函数

$w(x-x_i)$ ——核(或权)函数

ΔV_I ——与节点 I 相关的值

NP ——为节点数目

与有限元不同, 无网格法的速度场函数一般不具有插值性质, 即 $\phi_I(x_j) \neq \delta_{ij}$, 这是无网格法的主要缺陷之一。需要采用相应的处理技术来施加本质边界条件, 本文采用边界奇异权方法^[9]能够在无网格法里实现本质边界条件的直接、精确施加。

1.2 等效应变速率矩阵和体积应变速率矩阵

由速度-应变速率的关系式知, 二维问题中应变速率矢量 $\dot{\epsilon}$ 的矩阵表达式为

$$\dot{\epsilon} = [B_1(x), \dots, B_{NP}(x)]\hat{u}(x) \quad (7)$$

对于平面应变问题

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y \end{bmatrix} \quad (8)$$

应变速率矩阵为

$$B_I(x) = \begin{bmatrix} \phi_{I,x}(x) & 0 \\ 0 & \phi_{I,y}(x) \\ \phi_{I,y}(x) & \phi_{I,x}(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

如果对于轴对称问题

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\epsilon}_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_r / \partial r \\ \partial u_z / \partial z \\ u_r / r \\ \partial u_z / \partial r + \partial u_r / \partial z \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B_I(r, z) = \begin{bmatrix} \phi_{I,r}(r, z) & 0 \\ 0 & \phi_{I,z}(r, z) \\ \phi_{I,z}(r, z) / r & 0 \\ \phi_{I,z}(r, z) & \phi_{I,r}(r, z) \end{bmatrix} \quad (11)$$

于是, 等效应变率 $\dot{\bar{\epsilon}}$ 的矩阵形式为

$$\dot{\bar{\epsilon}} = (\dot{\epsilon} D \dot{\epsilon})^{1/2} = (\hat{u}^T B^T D B \hat{u})^{1/2} = (\hat{u}^T P \hat{u})^{1/2} \quad (12)$$

式中 $P = B^T D B$

$$D = \text{diag} [2/3, 2/3, 1/3]$$

体积应变率的 $\dot{\epsilon}_v$ 的矩阵形式为

$$\dot{\epsilon}_v = [C_1 \dots C_{NP}]\hat{u}(x) \quad (13)$$

式中 $C_I = [\phi_{I,x} \quad \phi_{I,y}]$

1.3 用于刚塑性/刚粘塑性不可压缩性材料

设变形体的体积为 V , 表面面积为 S , 在力已知边界 S_F 上给定面力为 F_i , 在速度已知边界 S_u 上给定速度为 \bar{u}_i , 忽略体积力。则真实速度场应满足下列塑性力学基本方程^[10]:

1) 平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (14)$$

2) 速度-应变速率关系方程

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (15)$$

3) Levy-Mises 应力应变速率关系方程

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \sigma'_{ij} (\lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}}) \quad (16)$$

4) Mises 屈服准则

$$\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = k^2 \quad (k = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}) \quad (17)$$

5) 材料不可压缩条件

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad (18)$$

6) 边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = F_i \quad (\text{在力面 } S_F \text{ 上}) \quad (19)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在力面 } S_u \text{ 上}) \quad (20)$$

在传统的刚塑性有限元法中, 往往采用罚函数法将体积不可压缩条件作为一个惩罚项, 即 $\frac{\alpha}{2} \int_V (\dot{\epsilon}_v)^2 dV$, 引入泛函中, 实际上是要求 $\dot{\epsilon}_v$ 在单元内处处很小; 这样的约束条件会由于过度约束而产生体积闭锁。而修正的罚函数法^[10]通过将要求 $\dot{\epsilon}_v$ 在单元内处处很小修正为要求 $\dot{\epsilon}_v$ 在单元内的平均值很小, 能够有效的松弛约束和施加体积不可压缩条件。Chen 等人^[11]和 Dolbow 等人^[12]分别指出, 无网格法在用于不可压缩材料或几乎不可压缩材料时由于过度约束也会产生体积闭锁问题, 特别当采用小影响域时, 体积闭锁愈严重。

基于此, 本文在无网格法里借鉴有限元的处理方法, 采用修正的罚函数法施加体积不可压缩条件, 要求 $\dot{\epsilon}_v$ 在背景积分网格内的平均值很小来松弛约束, 系统能量泛函 Π 为

$$\Pi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} dV + \frac{\alpha}{2V} \left(\int_V \dot{\epsilon}_v dV \right)^2 - \int_{S_F} F_i \bar{u}_i dS \quad (\text{对刚塑性材料}) \quad (21)$$

如果是刚粘塑性材料, 则第一项变为

$$\int_V E(\dot{\bar{\epsilon}}) dV = \int_V \left(\int_0^{\dot{\bar{\epsilon}}} \bar{\sigma} d\dot{\bar{\epsilon}} \right) dV$$

特别地, 对于接触摩擦边界的处理, 本文采用由 Kobayashi 等人^[8]提出的反正切摩擦模型。则系统能量泛函 Π 变为

$$\Pi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} dV + \frac{\alpha}{2V} \left(\int_V \dot{\epsilon}_v dV \right)^2 + \int_{S_F} \left[\int_0^{u_i} mk \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{u_i}{u_0} \right) du_i \right] dS \quad (22)$$

式中 $\bar{\sigma}$ ——等效应力

- $\dot{\epsilon}$ —— 等效应变率
- α —— 惩罚因子
- V —— 背景积分网格的面积 (二维) 或体积 (三维)
- S_F —— 摩擦接触边界
- m —— 摩擦因子
- k —— 剪切屈服强度
- u_s —— 工件与模具接触面上的相对滑动速度
- u_0 —— 与 u_s 相比很小的正常数

根据变分原理, 得到

$$\int_V \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} [\mathbf{P}_{1I} \cdots \mathbf{P}_{1NP}] \hat{\mathbf{u}} dV + \frac{\alpha}{V} \int_V \mathbf{C}_I^T dV \int_V [\mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_{NP}] \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{S_F} mk \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{u_s}{u_0}\right) dS = 0 \quad (23)$$

为了求解以上非线性方程, 采用 Newton-Raphson 方法进行迭代, 把式 (23) 用 Taylor 级数在 $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{(n-1)}$ 处展开, 忽略二阶以上高阶微分, 只取其线性部分, 得到

$$\mathbf{K}^{(n)} \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} \quad (24)$$

式中

$$\mathbf{K}_J^{(n)} = \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \mathbf{P}_{IJ} dV + \frac{\alpha}{V} \int_V \mathbf{C}_I^T dV \int_V \mathbf{C}_J dV + \int_{S_F} mk \frac{2}{\pi} \frac{u_0}{u_0^2 + u_s^2} \Psi_I \Psi_J dS \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_I^{(n)} = - \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} [\mathbf{P}_{1I} \cdots \mathbf{P}_{1NP}] \hat{\mathbf{u}}^{(n-1)} dV -$$

$$\frac{\alpha}{V} \int_V \mathbf{C}_I^T dV \int_V [\mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_{NP}] \hat{\mathbf{u}}^{(n-1)} dV - \int_{S_F} mk \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{u_s}{u_0}\right) dS \quad (26)$$

当速度修正值 $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$ 求得后, 采用 $\hat{\mathbf{u}}^{(n)} = \hat{\mathbf{u}}^{(n-1)} + \beta \Delta \mathbf{u}^{(n)}$ 进行修正, 其中 β 称为衰减因子 ($\beta = 0 \sim 1$)。如此迭代下去, 直到满足速度收敛准则为止。初始的 u_0 应当接近真实解, 否则 Newton-Raphson 迭代会不收敛。一般先采用直接迭代方法形成初始速度场, 再进入 Newton-Raphson 迭代完成对真实速度场的求解。

2 实例分析

为验证方法的可行性, 对平面应变镦粗过程进行数值分析。如图 1a 所示, $H_0 = 1.5\text{m}$, $L_0 = 2.0\text{m}$; 模具向下的速度为 $v_0 = 1.0\text{m/s}$; 流动应力 $\bar{\sigma} = 10.0 \dot{\epsilon}^{0.1}$ 。取坯料的 1/2 进行计算, 其力学模型如图 1b 所示。

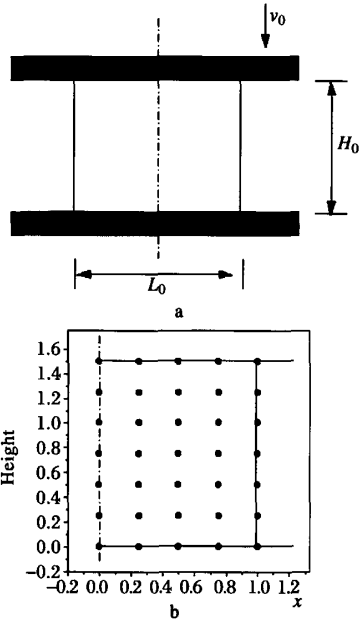


图 1 平面应变镦粗及其分析模型

a) 问题描述; b) 分析模型和初始节点离散

Fig. 1 Geometric description of plane strain upsetting and initial nodal distribution

计算时, 采用 5×7 点均匀分布离散节点模型, 采用 4×6 个背景积分域, 每个积分域采用 2×2 点高斯积分; 步长迭代增量步取坯料初始高度的 1%; 取 $u_0 = 5 \times 10^{-4}$; 罚因子取 $\alpha = 10^6$ 。选取三次样条权函数和矩形影响域, 即

$$w(x - x_I) = w\left(\frac{|x - x_I|}{a_x}\right) \cdot w\left(\frac{|y - y_I|}{a_y}\right)$$

式中 a_x, a_y —— x, y 方向的支撑或影响域大小的量度 且有

$$w\left(\frac{|x - x_I|}{a}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\left(\frac{|x - x_I|}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{|x - x_I|}{a}\right)^3 & \text{for } 0 \leq |x - x_I| \leq \frac{a}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\left(\frac{|x - x_I|}{a}\right) + 4\left(\frac{|x - x_I|}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{|x - x_I|}{a}\right)^3 & \text{for } \frac{a}{2} < |x - x_I| \leq a \\ 0 & \text{for } a < |x - x_I| \end{cases}$$

如图 2, 压下量为 25% 时, 对不同摩擦因子 m , 坯料得到不同的变形情况。由图可见, 当 $m = 0$ 时, 变形后没有鼓肚出现; 当 $m > 0$ 时, 由于坯料与模具上下接触表面存在阻碍相对运动的摩擦力, 坯料变形后出现鼓肚; 随着 m 的增大, 鼓肚现象越明显。

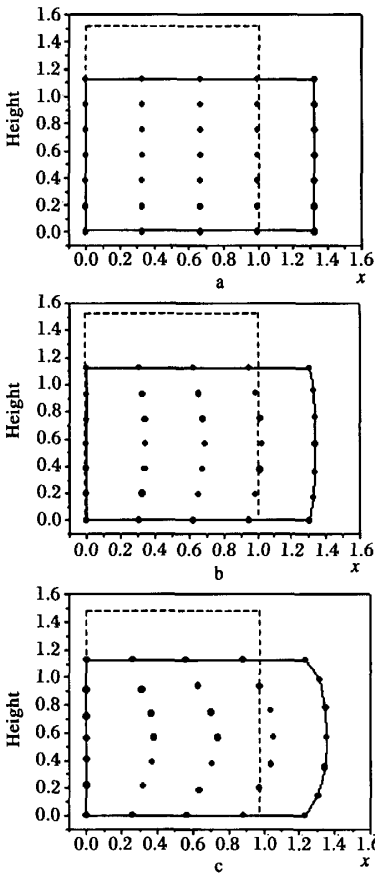


图 2 压下量为 25% 时不同 m 对变形的影响 (虚线为坯料初始形状)

a) $m=0.0$; b) $m=0.2$; c) $m=0.5$

Fig. 2 Deformed shapes at 25% reduction in height with different frictional conditions

图 3 为采用本文方法计算得到的 $m=0.5$ 且压下量为 25% 时, 坯料各节点的位置和速度与刚性

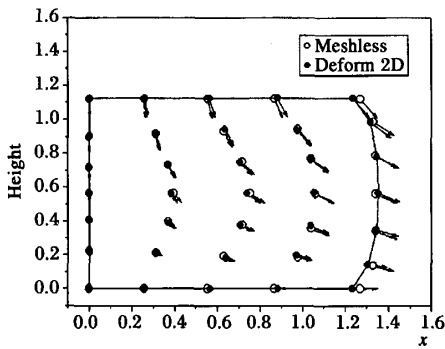


图 3 压下量为 25%, $m=0.5$ 时无网格模拟结果与 Deform 2D 比较

Fig. 3 Comparison between Meshless method and Deform 2D at 25% reduction in height with $m=0.5$

有限元体积成形商品化软件 Deform 2D 结果的对比, 可以看出, 二者吻合得较好。

图 4 为当 $m=0.2$ 且最大压下量为 40% 时, 坯料的一个连续变形过程。

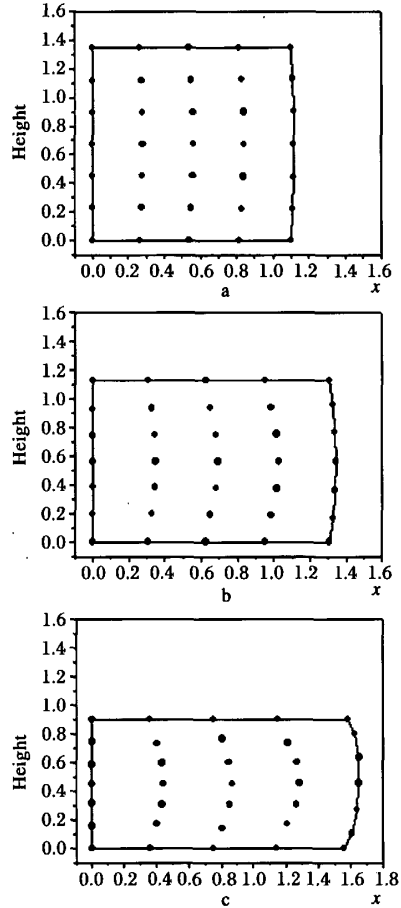


图 4 无网格法模拟最大压下量为 40%, $m=0.2$ 时的连续变形过程

a) 10% 压下量; b) 25% 压下量; c) 40% 压下量

Fig. 4 Progressive deformed shapes to 40% reduction in height with $m=0.2$

3 结 论

1) 将刚塑性/刚粘塑性流动理论与无网格 RK-PM 法相结合, 提出了基于刚塑性/刚粘塑性不可压缩材料的无网格 RKPM 法; 进一步拓展了无网格 RKPM 法的应用范围。

2) 分别采用边界奇异权法和修正的罚函数法施加本质边界条件和体积不变条件。采用边界奇异权法能够实现本质边界条件的直接、精确施加; 修正的罚函数法则通过考虑对体积不变条件进行松弛约

束,考虑并处理了无网格法里会产生的体积闭锁问题。

3)以平面应变镦粗为例,进行了无网格RKPM法在金属刚塑性/刚粘塑性不可压缩材料中的初步应用。

参考文献

- [1] J S Chen, et al. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis. *Comput Mech*, 1998, 22, 289~307
- [2] S W Xiong, et al. On the utilization of the reproducing kernel particle method for the numerical simulation of plain strain rolling. *Int J Mach Tools Manuf*, 2003, 43, 89~102
- [3] S W Xiong, et al. Numerical simulation of three-dimensional steady-state rolling by the reproducing kernel particle method. *Eng Comput*, 2003, 20(7):855~874
- [4] S W Xiong, et al. Simulation of bulk metal forming processes using the reproducing kernel particle method. *Comput Struct*, 2005, 83, 574~587
- [5] S W Xiong, et al. Steady and non-steady state analysis of bulk forming processes by the reproducing kernel particle method. *Finite Elem Anal Des*, 2005, 41, 599~614
- [6] Li Guangyao, et al. Meshfree method for 3D bulk forming analysis with lower order integration scheme. *Eng Anal Bound Elem*, 2004, 28, 1283~1292
- [7] 崔青玲等. 无网格RKPM法及其在体积成型中的应用. *东北大学学报(自然科学版)*, 2004, 25(9): 855~858
- [8] S Kobayashi, Oh S I, Altan T. *Metal Forming and the Finite Element Method*. New York: Oxford University Press, 1989
- [9] J S Chen, et al. Some recent improvements in meshfree methods for incompressible finite elasticity boundary value problems with contact. *Comput Mech*, 2000, 25, 137~156
- [10] 彭颖红. *金属塑性成形仿真技术*. 上海:上海交通大学出版社, 1999
- [11] J S Chen, et al. An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible hyperelastic solids. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 2000, 181, 117~145
- [12] J Dolbow, et al. Volumetric locking in the element free Galerkin method. *Int J Numer Methods Eng*, 1999, 46, 925~942

A reproducing kernel particle method based on incompressible rigid-plastic/rigid-viscoplastic materials

LIU Yong-hui YU Song CHEN Jun LI Cong-xin

(National Die & Mold CAD Engineering Research Center, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030 China)

Abstract: A reproducing kernel particle method (RKPM) based on incompressible rigid-plastic /rigid-viscoplastic materials for analysis of metal forming is proposed. This method is a combination of meshless method with the flow theory for rigid-plastic/viscoplastic materials, which further expands the application of RKPM. The boundary singular kernel method and the modified penalty method are utilized to treat the essential boundary conditions and incompressibility constraint, respectively. The stiffness equation for analysis of metal forming using RKPM is derived and its key algorithms are given. A plain strain upsetting is analyzed and the numerical results are compared with those obtained by commercialized rigid-plastic FEM software Deform 2D. The good agreement demonstrates the validity and effectiveness of the proposed method.

Key words: reproducing kernel particle method; metal forming; rigid-plasticity/viscoplasticity; incompressibility; modified penalty method